RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 aprile 1902.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un problema relativo alla teoria della deformazione delle superficie.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Per enunciare sotto forma semplice il problema che tratto nella presente Nota, premetto le definizioni seguenti. Si consideri una superficie S flessibile ed inestendibile. Per ogni deformazione della S cangiano le sue linee assintotiche (reali od immaginarie); diciamo assintotiche *attuali* le effettive assintotiche della S, nella sua configurazione attuale, ed assintotiche *virtuali* ogni sistema di linee di S suscettibili di diventare assintotiche dopo una conveniente deformazione. Come è ben noto, dato un sistema di assintotiche virtuali, la deformazione corrispondente che deve subire la S, per renderle attuali, è pienamente determinata. Ciò premesso, ecco l'enunciato del problema di cui ci vogliamo occupare: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *corrispondenti l'una all'altra punto per punto, in guisa che si corrispondano le loro assintotiche attuali e inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali di* S *corrisponda un sistema di assintotiche virtuali sopra* S_1.

Se una tale coppia di superficie esisterà, è chiaro che ogni deformazione della S trarrà seco una corrispondente deformazione della S_1, cosicchè i due problemi di trovare tutte le superficie applicabili sopra S o quelle applicabili sopra S_1 saranno perfettamente equivalenti. Diremo, per abbreviare, che le due superficie S, S_1 sono *coniugate in deformazione.*

Se le due superficie S, S_1 hanno curvatura positiva, le loro linee assintotiche, attuali o virtuali, sono immaginarie. Volendo anche in questo caso enunciare il problema sotto forma reale, basterà parlare invece della corrispondenza dei *sistemi coniugati* di S a quelli di S_1. Allora, per qualunque deformazione della S, vi ha uno ed un solo sistema attualmente coniugato (sempre reale) che si conserva coniugato dopo la deformazione; lo diremo perciò un sistema coniugato *permanente*. E potremo quindi enunciare il problema sotto l'altra forma: *Trovare le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono per sistemi coniugati, e tali di più che ad ogni sistema coniugato permanente di* S *corrisponda un sistema coniugato permanente sopra* S_1.

Avvi una soluzione ovvia del problema, che trascuriamo nel seguito. Essa si ottiene associando ad una superficie qualunque S una sua omotetica S_1.

2. Per trattare analiticamente il problema enunciato, riferiamo le due superficie supposte S, S_1 ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, e siano

$$(1) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$(1^*) \qquad ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1 dv^2$$

le rispettive espressioni dei quadrati dei loro elementi lineari. Ogni deformazione della S è individuata [1] dalla relativa seconda forma quadratica fondamentale

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

La nostra ipotesi equivale a dire che deve esistere ogni volta una seconda forma fondamentale corrispondente per S_1

$$D_1 du^2 + 2D_1'\,du\,dv + D_1''\,dv^2,$$

tale che sussistano le proporzioni

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D : D' : D''.$$

Pei calcoli seguenti conviene meglio sostituire a D, D', D'' le quantità

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

e analogamente a D_1, D_1', D_1'':

$$\Delta_1 = \frac{D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \qquad \Delta_1' = \frac{D_1'}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}, \qquad \Delta_1'' = \frac{D_1''}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}.$$

[1] *Lezioni di Geometria differenziale*, cap. IV.

Si sa allora (1) che $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ sono unicamente vincolate dalla equazione di Gauss

$$\mathcal{A}\mathcal{A}'' - \mathcal{A}'^2 = K, \tag{2}$$

indicando con K la curvatura totale di S, e dalle due equazioni di Codazzi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{A}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathcal{A}'}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}'' = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{A}''}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathcal{A}'}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A} - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}' + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \mathcal{A}'' = 0, \end{cases} \tag{3}$$

i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ ecc. essendo costruiti per la prima forma quadratica fondamentale (1) di S.

Si ha per ipotesi

$$\mathcal{A}_1 = \lambda \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}'_1 = \lambda \mathcal{A}', \quad \mathcal{A}''_1 = \lambda \mathcal{A}'',$$

dove λ indica un conveniente fattore di proporzionalità. Intanto dalla corrispondente equazione di Gauss

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}''_1 - \mathcal{A}'^2_1 = K_1$$

si trae per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{K_1}{K}. \tag{4}$$

Questo fattore λ serba dunque invariato il suo valore per qualunqne deformazione simultanea di S, S_1.

Ora se scriviamo le equazioni (3) di Codazzi per la S e vi sottraghiamo ordinatamente le (3) stesse moltiplicate per λ, ne deduciamo le due equazioni di condizione

$$\begin{cases} \mathcal{A} \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \mathcal{A}' \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A} + 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 \right] \lambda \mathcal{A}' + \\ \qquad + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A}'' = 0 \\ \mathcal{A}'' \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \mathcal{A}' \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + \left[\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A} + 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 \right] \lambda \mathcal{A}' + \\ \qquad + \left[\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] \lambda \mathcal{A}'' = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Siccome λ non cangia di valore, queste sono equazioni lineari omogenee in $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ che debbono aver luogo, per ipotesi, in tutte le flessioni di S, cioè per tutte le terne di valori di $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ soddisfacenti alle (2), (3).

(1) *Lezioni* ecc., pag. 90-91.

Segue di qui che le (5) debbono risolversi in identità [1], ciò che dà luogo alle 6 equazioni di condizione:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} = 2\left[\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_1\right], & \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_1 \\ \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial u} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_1, & \dfrac{\partial \log\lambda}{\partial v} = 2\left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_1\right] \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}_1, & \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_1. \end{cases}$$

Osserviamo che se si supponesse costante λ, ossia costante il rapporto delle due curvature, seguirebbe dalle (6) l'eguaglianza dei valori dei corrispondenti simboli di Christoffel per S, S_1. Ma allora dalle formole (II) a pag. 51 delle Lezioni si deduce subito che saremmo nel caso ovvio escluso di due superficie omotetiche.

3. Paragonando fra loro le (6) delle due prime righe e aggiungendo le formole della terza riga, vediamo intanto che debbono essere soddisfatte le quattro condizioni seguenti:

$$(7)\quad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}_1 - 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_1, & \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}_1 - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_1 \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}_1, & \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}_1. \end{cases}$$

Queste hanno un notevole significato geometrico, che si trova ricorrendo alla equazione differenziale delle geodetiche sopra S, scritta sotto la forma a pag. 150 delle Lezioni:

$$(8)\quad v'' - \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} v'^3 + \left[\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right] v'^2 + \left[2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right] v' + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Qui è supposta, lungo la geodetica, espressa v in funzione di u, e gli accenti indicano derivazione rapporto a u. Le (7) esprimono che la (8) è la stessa costruita per S o per S_1, e per ciò alle geodetiche di S debbono corrispondere le geodetiche di S_1, o come diciamo per brevità: *la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *deve essere una rappresentazione geodetica.*

Supponiamo ora inversamente che le superficie S, S_1 si corrispondano punto per punto in guisa che siano conservate le linee geodetiche, ed insieme le linee assintotiche attuali, e dimostriamo che a qualunque sistema d'assintotiche virtuali sopra S corrisponderà ancora sopra S_1 un sistema della stessa natura.

[1] Per la dimostrazione rigorosa v. il § 2 della mia Memoria: *Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* (Annali di Matematica, Serie 3ª, T. III, 1899).

Indichino infatti Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, i valori di Δ, Δ', Δ'' per la configurazione attuale di S. I calcoli del § 2 dimostrano che Δ_0, Δ'_0, Δ''_0, soddisferanno alle (5), avendo λ^2 il valore (4). Ma poichè d'altra parte la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica, sussisteranno le (7) e si avrà quindi

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_1$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_1 .$$

Indicando con A il valore comune delle due prime quantità, con B quello delle due seconde, le equazioni (5) per Δ_0,, Δ'_0, Δ''_0 si scrivono

$$\Delta_0 B - \Delta'_0 A = 0, \quad -\Delta'_0 B + \Delta''_0 A = 0.$$

Ma siccome il determinante

$$\Delta_0 \Delta''_0 - \Delta'^2_0 = K$$

non è nullo, risulta di qui $A = 0$, $B = 0$, cioè sono soddisfatte tutte le (6) e le superficie S, S_1 sono quindi coniugate in deformazione, c. d. d.

Possiamo compendiare i risultati ottenuti nel teorema: *Affinchè sopra due superficie* S, S_1, *che si corrispondono con conservazione delle linee assintotiche attuali, si corrispondano altresì tutte le assintotiche virtuali, è necessario e sufficiente che la rappresentazione di* S *sopra* S_1 *conservi le linee geodetiche.*

4. Colle considerazioni esposte sopra il problema enunciato viene ridotto alla questione seguente: *Trovare tutte le coppie di superficie* S, S_1 *che si corrispondono con conservazione delle linee geodetiche e dei sistemi coniugati.*

È ben noto come il problema di trovare le coppie di superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra (o meglio i loro ds^2) è stato risoluto dal Dini [1].

L'una e l'altra superficie (escluso il caso ovvio dell'omotetia) debbono appartenere alla classe di Liouville, e più precisamente i due sistemi ortogonali che si conservano nella rappresentazione sono costituiti da due sistemi isotermi di ellissi e di iperbole geodetiche. Qui mi limiterò a trattare il caso particolare in cui la prima e quindi anche la seconda superficie di Liouville sia applicabile sopra una superficie di rotazione, ed il detto sistema isotermo si riduca ai meridiani e paralleli.

Si troverà così una classe effettiva di superficie di rotazione, dipendenti da due costanti arbitrarie, che risolve il nostro problema. Esse possono iden-

[1] *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie sopra un'altra* (Annali di matematica, t. III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons*, III[e] Partie, pag. 47.

tificarsi con quadriche di rotazione (reali od immaginarie), ovvero colle evolute delle superficie applicabili sulla sfera.

Poniamo l'elemento lineare della prima superficie S sotto la forma

$$(a)\quad ds^2 = r^2\,(du^2 + dv^2),$$

dove r è funzione della sola u. Risulta allora dalle citate ricerche del Dini (V. § 5 della Memoria) che l'elemento lineare della S_1, rappresentata geodeticamente sopra S, avrà la forma

$$ds_1^2 = \frac{r^2}{b(ar^2+b)^2}\,du^2 + \frac{r^2\,dv^2}{ar^2+b}.$$

Delle due costanti arbitrarie a, b la seconda, limitandoci come intendiamo di fare a superficie ed a rappresentazioni reali, deve essere positiva. Sostituendo alla S_1 una sua omotetica possiamo rendere $b = 1$, senza alterare la generalità; così avremo:

$$(a^*)\qquad ds_1^2 = \frac{r^2}{(ar^2+1)^2}\,du^2 + \frac{r^2}{ar^2+1}\,dv^2.$$

Si osservi ora in generale che per un ds^2 della forma

$$ds = \alpha^2\,du^2 + \beta^2\,dv^2$$

con α, β *funzioni della sola* u, i valori dei simboli di Christoffel sono i seguenti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \dfrac{\alpha'}{\alpha}, & \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0, & \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\dfrac{\beta\beta'}{\alpha^2} \\ \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, & \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \dfrac{\beta'}{\beta}, & \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 0, \end{cases}$$

gli accenti indicando derivazione rapporto ad u. I valori di α, β per la S sono

$$\alpha = \beta = r$$

e per la S_1

$$\alpha_1 = \frac{r}{ar^2+1}, \quad \beta_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2+1}}.$$

Si verifica subito colle (9) che le condizioni (7) sono soddisfatte, ciò che doveva essere perchè la rappresentazione di S sopra S_1 è geodetica. Se calcoliamo poi le curvature K, K_1, abbiamo

$$-K = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{r'}{r}\right)'$$

$$-K_1 = \frac{1}{\alpha_1\beta_1}\left(\frac{\beta_1'}{\alpha_1}\right)' = \frac{1}{r^2}\left\{(ar^2+1)\left(\frac{r'}{r}\right)' - ar'^2\right\},$$

e la (4) ci dà quindi per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = ar^2 + 1 - \frac{ar'^2}{\left(\frac{r'}{r}\right)'}. \tag{10}$$

Ora basta aggiungere p. es., le due seconde (6), che danno

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} \\ \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 0 , \end{cases} \tag{11}$$

e soddisfatte queste, insieme alla (10), la rappresentazione di S sopra S_1, quando sieno conformate convenientemente a superficie di rotazione, conserverà altresì le linee assintotiche (o i sistemi coniugati).

Dalle (11) integrando abbiamo

$$\lambda = c\,\frac{\alpha}{\alpha_1} = c(ar^2 + 1) ,$$

indicando con c una nuova costante arbitraria. Confrontando colla (10), si ha dunque, per determinare r, l'equazione differenziale

$$\left(\frac{r'}{r}\right)' = \frac{ar'^2}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}; \tag{12}$$

tutte le superficie di rotazione che la soddisfano danno altrettante soluzioni del problema.

Per integrare la (12) poniamo

$$\mathrm{T} = \frac{r'}{r} ,$$

onde si può scrivere

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} = \frac{a\mathrm{T}r}{(ar^2+1)[1 - c^2(ar^2+1)]}$$

e quindi integrando

$$\mathrm{T}^2 = \frac{ar^2+1}{h[1 - c^2(ar^2+1)]} ,$$

essendo h una nuova costante. Abbiamo dunque

$$rdu = \sqrt{\frac{h[1 - c^2(ar^2+1)]}{ar^2+1}}\,dr \tag{13}$$

e con una nuova quadratura si avrebbe r in funzione di u. Ma è inutile proseguire l'integrazione, poichè se sostituiamo nella (a) per rdu il valore pre-

cedente, otteniamo già per il ds^2 della superficie S la forma perfettamente determinata:

$$(A) \qquad ds^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{ar^2 + 1} dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Osserviamo che se in questa cangiamo r in kr (k costante) ciò equivale a moltiplicare simultaneamente le costanti a, h per k^2; ne segue che, senza alterare la superficie, possiamo prendere il valore assoluto di una di queste costanti $= 1$.

Le superficie di rotazione (A) che risolvono il problema dipendono dunque, come si era enunciato, da due costanti arbitrarie essenziali. Consideriamo ora la seconda superficie S_1, sulla quale la S, data dalla (A), è rappresentata geodeticamente con conservazione dei sistemi coniugati. Essa avrà per la (a^*) e per la (13) l'elemento lineare

$$ds_1^2 = \frac{h[1 - c^2(ar^2 + 1)]}{(ar^2 + 1)^3} dr^2 + \frac{r^2}{ar^2 + 1} dv^2 .$$

È chiaro *a priori* che questa forma di ds^2 deve rientrare nella (A) stessa, dove soltanto saranno cangiati i valori delle costanti a, c, h. Ed in effetto, se poniamo

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{ar^2 + 1}},$$

la precedente diventa:

$$(A^*) \qquad ds_1^2 = \frac{-hc^2\left[1 - \frac{1}{c^2}(1 - ar_1^2)\right]}{1 - ar_1^2} dr_1^2 + r_1^2 dv^2 .$$

Come si vede, è questa la (A) stessa, cangiate a, c, h in

$$(14) \qquad a_1 = -a , \quad c_1 = \frac{1}{c} , \quad h_1 = -hc^2 .$$

5. Prendasi ora di una delle nostre superficie della classe (A) la superficie *complementare* [1] S rispetto alle geodetiche v deformate dei meridiani. Dimostreremo che questa complementare S appartiene alla sua volta alla classe (A).

Quando l'elemento lineare di una superficie S applicabile sopra una perficie di rotazione è posto sotto la forma normale

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad (r = \varphi(u),$$

[1] *Lezioni* ecc., pag. 131.

quello della complementare S è dato da

$$\overline{ds}^2 = r^2\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv^2_1,$$

dove

$$\varrho = \frac{1}{\left(\frac{dr}{du}\right)} \text{ (1)}.$$

Nel caso nostro abbiamo dalla (A)

$$\varrho = \sqrt{\frac{ar^2+1}{h[1-c^2(ar^2+1)]}},$$

e quindi risulta

$$\overline{ds}^2 = \frac{\frac{1}{ac^2}\left[1-c^2\left(1+\frac{\varrho^2}{hc^2}\right)\right]}{1+\frac{\varrho^2}{hc^2}}\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv^2_1.$$

Questa è la forma stessa (A), cangiate a, c, h in

$$\bar{a} = \frac{1}{hc^2}, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{h} = \frac{1}{ac^2},$$

ovvero moltiplicando $\bar{a}$, $\bar{h}$ per c^2 (col cangiare ϱ in $c\varrho$):

$$\text{(5)} \qquad \bar{a} = \frac{1}{h}, \quad \bar{c} = c, \quad \bar{h} = \frac{1}{a}.$$

Se si confrontano le (14), (15) si vede subito che le operazioni rappretate da queste formole sono fra loro permutabili. Ed il significato geometrico di questo fatto sta in ciò che prendendo delle due superficie S, S_1 della classe (A), coniugate in deformazione, le rispettive complementari S, $\overline{S}_1$, queste sono nuovamente coniugate fra loro in deformazione. Per convincersene basta ricordare che sopra S, $\overline{S}$, come sopra S_1, $\overline{S}_1$, si corrispondono le assintotiche e per ciò intanto quelle di $\overline{S}$, $\overline{S}_1$. In secondo luogo si corrispondono sopra $\overline{S}$, $\overline{S}_1$ le deformate dei paralleli ed egualmente le deformate dei meridiani, poichè queste corrispondono a quelle linee di S, S_1 che sono a tangenti coniugate colle rispettive deformate dei meridiani. Abbiamo dunque il teorema: *Se due superficie applicabili sopra superficie di rotazione si corrispondono geodeticamente e per sistemi coniugati, lo stesso accade delle loro due complementari.*

6. Un caso particolare notevole di coppie di superficie S, S_1 della classe (A) coniugate in deformazione si ottiene supponendo la costante $c = 1$;

(1) Veggasi la seconda edizione delle mie *Lezioni*, vol. I, pag. 296.

allora la (A) diventa

$$ds^2 = \frac{-ahr^2}{ar^2+1}\,dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Le due costanti a, h debbono qui avere segno contrario e senza alterare la generalità potremo fare

$$\alpha) \quad a = -1, \quad h = \mathrm{R}^2$$

ovvero

$$\beta) \quad a = +1, \quad h = -\mathrm{R}^2.$$

Così ponendo

$$u = \sqrt{1 \pm r^2},$$

avremo nel primo caso

$$\alpha^*) \quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (u^2 - 1)\,dv^2\}$$

e nel secondo

$$\beta^*) \quad ds^2 = \mathrm{R}^2 \{du^2 + (1 - u^2)\,dv^2\}.$$

L'uno e l'altro elemento lineare appartengono ad una falda dell'evoluta di una superficie a curvatura costante positiva $= \frac{1}{\mathrm{R}^2}$, o, ciò che è lo stesso pel teorema di Bonnet, di una superficie a curvatura media costante $= \frac{1}{\mathrm{R}}$.

Applicando i risultati sopra ottenuti, avremo due coppie (S, $\overline{\mathrm{S}}$), (S_1, $\overline{\mathrm{S}}_1$) di tali superficie, ciascuna coppia formando l'evoluta completa di una superficie a curvatura media costante. In quale relazione fra loro stanno le due evolventi Σ, Σ_1 a curvatura media costante? Senza entrare qui nei calcoli relativi, diciamo che la Σ, Σ_1 son legate dalla trasformazione involutoria di Hazzidakis [1], cioè Σ, Σ_1 sono applicabili l'una sull'altra con conservazione delle linee di curvatura ed inversione dei raggi principali di curvatura. Inversamente siano Σ, Σ_1 due superficie a curvatura media costante, trasformate l'una dell'altra per trasformazione di Hazzidakis, e siano (S, $\overline{\mathrm{S}}$) le due falde della evoluta di Σ e (S_1, $\overline{\mathrm{S}}_1$) quelle di Σ_1. *Sopra due falde omologhe* S, S_1, *ovvero* $\overline{\mathrm{S}}$, $\overline{\mathrm{S}}_1$, *si corrisponderanno non solo i sistemi coniugati, ma anche le linee geodetiche.* Questa proprietà della trasformazione di Hazzidakis non sembra sia stata fin qui osservata.

7. Lasciando ora da parte il caso $c = 1$, già sopra considerato, proponiamoci di trovare la forma della curva meridiana per la superficie di rotaz. (A). Sia

$$z = \Psi(\varrho)$$

l'equazione del meridiano, l'asse di rotazione essendo l'asse delle z ed indicando ϱ il raggio del parallelo. Per determinare $\Psi(\varrho)$ dobbiamo identificare la (A) con

$$ds^2 = \left(1 + \Psi'^2(\varrho)\right) d\varrho^2 + \lambda^2 \varrho^2\, dv^2,$$

[1] *Lezioni*, pag. 447.

ponendo $r = \lambda\varrho$ (λ costante). Ne deduciamo

$$\psi'^2(\varrho) = \frac{[\lambda^2 h - (1 + \lambda^2 c^2 h)] - a\lambda^2\varrho^2(1 + \lambda^2 c^2 h)}{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

e se disponiamo di λ in guisa da annullare nel numeratore del secondo membro il termine indipendente da ϱ, avremo per λ^2 il valore

$$\lambda^2 = \frac{1}{h(1 - c^2)},$$

che è finito essendo qui $c^2 \neq 1$.

Integrando abbiamo allora

$$z = \psi(\varrho) = \sqrt{-\frac{h}{a}}\sqrt{a\lambda^2\varrho^2 + 1},$$

onde per la superficie di rotazione (A), quando $c^2 \neq 1$, si può prendere una quadrica, che sarà del resto reale od immaginaria a seconda dei valori delle costanti.

Arrestandoci al caso reale, dovrà essere

$$h(1 - c^2) > 0$$

e le costanti a, h dovranno avere segno contrario. Se supponiamo dapprima a negativa, h positiva, potremo fare senza nuocere alla generalità

$$a = -1, \quad h = k^2, \quad \lambda^2 = \frac{1}{k^2(1 - c^2)}$$

e la costante c^2 dovrà essere naturalmente < 1. La curva meridiana è quindi l'ellisse

$$\frac{z^2}{k^2} + \frac{\varrho^2}{k^2(1 - c^2)} = 1$$

e la quadrica è un ellissoide di rotazione allungato, i cui semi-assi principale e secondario hanno le lunghezze

$$A = k, \quad B = k\sqrt{1 - c^2}.$$

Per ottenere l'altra quadrica di rotazione reale basta passare dall'attuale superficie S alla coniugata S_1 in deformazione, ciò che dà per le (14)

$$a_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{c}, \quad h_1 = -k^2c^2.$$

La curva meridiana ha per equazione

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{\varrho^2}{k^2\left(\frac{1}{c^2} - 1\right)} = 1;$$

la quadrica è adunque un iperboloide di rotazione a due falde che ha per lunghezza A, C dei semi-assi principale e secondario

$$A = k, \quad C = k\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$$

Effettivamente è facile accertarsi che fra i punti dell' ellissoide e dell' iperboloide col medesimo semi-asse principale $= A$ e coi semi-assi secondarî B, C legati dalla relazione

$$\frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} = \frac{1}{A^2}$$

si può stabilire una corrispondenza geodetica che conservi i sistemi coniugati.

Queste due quadriche sono dunque coniugate in deformazione.

Siano ora S, S_1 due loro rispettive deformate simultanee. I teoremi di Guichard ci insegnano che se si fa rotolare l' ellissoide sulla superficie applicabile S o l' iperboloide sulla superficie applicabile S_1, ogni volta ciascun fuoco descriverà una superficie di curvatura media costante $= \frac{1}{A}$. Due tali superficie Σ, Σ_1 a curvatura media costante sono nuovamente trasformate l' una dell' altra per trasformazione di Hazzidakis.

A queste proprietà dell' ellissoide ed iperboloide di Guichard coniugati in deformazione ero già in parte pervenuto nella Memoria citata sopra (§ 22), ed è appunto lo studio di queste proprietà che mi ha indotto a trattare il problema generale che forma l' oggetto di questa Nota.

Astronomia. — *Osservazioni del nuovo pianetino HU 1902 fatte coll' equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. Millosevich.

Le osservazioni furono fatte per mezzo del nuovo oggettivo di 38 cm. di apertura libera, donato all' osservatorio dal comm. Enrico Santoro, della cui munificenza è ben memore anche la nostra Accademia. Il dono derivò dai buoni uffici del prof. Tacchini.

L' oggettivo fu costruito dalla celebre casa Steinheil di Monaco ed è riuscito eccellente; esso potrà in avvenire rendere servigi alla scienza. Anche gli oculari vennero commessi alla medesima casa con piena mia soddisfazione. La rigorosa distanza focale è m. 5,248, e però un giro della vite del micrometro filare di Merz, che apparteneva all' antico oggettivo, mi risultò, da numerose osservazioni colla Polare e colle Plejadi (Cat. fot. Jacoby), di

Il pianetino HU è l'ultimo trovato colla fotografia dal dott. Carnera ad Heidelberg il 10 marzo decorso. Di 480 pianeti possediamo fino ad oggi elementi ellittici, e di 50 circa abbiamo o elementi circolari, o così scarse e vicine osservazioni da dover considerarli come perduti o quasi perduti.

Pianetino HU.		Grandezza 12,2	
1902 marzo 29		$9^h\ 24^m\ 15^s$	R. C. R.
α apparente pianeta		$11^h\ 11^m\ 22,^s,56$	(9^a.186)
δ » »	+	3° 55′ 38″ 0	(0. 733)
1902 aprile 3		$9^h\ 53^m\ 44^s$	R. C. R.
α apparente pianeta		$11^h\ 8^m\ 50,^s,89$	(8^a.759)
δ » »	+	4° 32′ 44″.1	(0, 725).

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota III del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Le esperienze che descriviamo nel presente lavoro formano la continuazione di quelle menzionate nella nostra ultima pubblicazione (1) intorno a questo argomento e trattano però ancora delle trasformazioni che la luce determina nei corpi che contengono il residuo dell'acido nitrico o quello dell'acido nitroso.

Nitrobenzolo ed alcool assoluto.

La reazione che avviene per azione della luce fra il nitrobenzolo e l'alcool etilico non è stata ancora studiata in modo esauriente e però nella citata nostra recente pubblicazione abbiamo detto che su questo argomento saremmo ritornati fra breve. Noto era fin ora che, assieme ad altre sostanze, dal nitrobenzolo per azione dell'alcool si forma anilina ed aldeide acetica ed era però nostro compito di scoprire la natura degli altri corpi che si producono assieme all'anilina.

Ripetendo le prove in più larga scala ed impiegando alcool assoluto in luogo di quello acquoso, usato nella nostra vecchia esperienza di Roma, forse per quest'ultima circostanza (2), abbiamo avuto un risultato alquanto diverso. Il rendimento in prodotti basici fu migliore, ma non abbiamo potuto riscontrare la presenza di aldeide acetica. I prodotti alcalini sono costituiti prevalentemente da *chinaldina*, l'*anilina* non manca, ma si forma in quantità più piccola ed è accompagnata da altre basi che fin ora non abbiamo potuto determinare. La reazione come si vede è complicata, e però sarà necessario studiarla nuovamente su scala anche maggiore.

Alla luce vennero esposti, durante tutto l'estate, complessivamente 60 gr. di nitrobenzolo in 200 c. c. di alcool assoluto. La soluzione diventa

(1) Questi Rendiconti X, 228 (aprile 1901).

(2) Anche su ciò sarà necessario ritornare con nuove esperienze.

bruna; distillando l'alcool a b. m. non abbiamo potuto scoprire in questo la presenza d'aldeide acetica. Al residuo venne aggiunto acido cloridico e la distillazione proseguita in corrente di vapore acqueo. Così passa tutto il nitrobenzolo rimasto inalterato. Trattando con soda in eccesso e distillando nuovamente si ottengono le basi, mentre resta in dietro nel pallone alquanta resina nera e friabile. Il distillato venne portato a secco con acido cloridrico. Il rendimento fu il seguente: 50 gr. di nitrobenzolo riottenuto e 6,6 gr. di cloridrati.

La separazione della *chinaldina* riesce assai bene coll'acido cloroplatinico. Aggiungendo alla soluzione del miscuglio dei cloridrati, alquanto concentrata, una soluzione concentrata di cloruro di platino, precipita quasi tutta la chinaldina. Il cloroplatinato si purifica assai facilmente dall'acqua bollente, da cui si ebbe in aghi lunghi rossoranciati del punto di fusione 229°. I punti di fusione dei sali anche più caratteristici e comuni delle basi chinoliniche mancano quasi sempre nella letteratura. Per il cloroplatinato di chinaldina gli autori danno il punto di fusione 226° (1), ma questo dato non bastava ad accertare la natura della nostra base. Noi abbiamo preparato però dalla chinaldina pura, ottenuta col metodo ordinario, il cloroplatinato ed il cloroaurato, ed abbiamo trovato per questi due sali rispettivamente i punti di fusione 229° e 155°. Abbiamo poi trasformato parte del nostro cloroplatinato in cloroaurato ed abbiamo trovato che questo fondeva pure a 155°. I corrispondenti sali della lepidina fondono rispettivamente a 225°-226° ed a 191°-192°. La base da noi ottenuta è quindi la chinaldina.

La separazione dell'*anilina* non fu così facile per la piccola quantità di prodotto di cui disponevamo e per la presenza di altre sostanze.

Abbiamo però creduto conveniente di trasformare tutta la base non precipitata col cloruro di platino in composto acetilico allo scopo di separare l'anilina allo stato di acetanilide. Ottenemmo così realmente per ebollizione dell'alcaloide con anidride acetica un prodotto cristallino, ma esso non era formato soltanto dall'anilide acetica. Per ripetute cristallizzazioni dall'acqua bollente, abbiamo potuto separare un composto meno solubile, dal punto di fusione 174°-175°, in quantità non sufficiente per un'esauriente esame. La parte più solubile fonde a 112° ed è realmente *acetanilide*. Essa ci dette, per svaporamento con acido solforico, il solfato d'anilina che abbiamo riconosciuto alla reazione col bicromato potassico; per ultimo l'abbiamo trasformato in fenolo con nitrito sodico, da cui abbiamo preparato il tribromofenolo dal punto di fusione 94°. Le acque madri, da cui si separarono i derivati acetilici ora menzionati, contengono in assai piccola quantità un'altra base non acetilabile, e però probabilmente terziaria, diversa dalla chinaldina; essa ci dette un picrato che fondeva a 168°-169°.

(1) Beilstein IV, pag. 307.

La reazione che avviene fra il nitrobenzolo e l'alcool non si presta ad essere riassunta in una sola equazione, si potrebbe ammettere che la trasformazione principale fosse da esprimersi nel seguente modo:

$$\underset{\text{nitrobenzolo}}{C_6H_5NO_2} + 2\underset{\text{alcool}}{C_2H_6O} = \underset{\text{chinaldina}}{C_{10}H_9N} + 4H_2O,$$

ma naturalmente con ciò non si terrebbe conto dell'anilina e delle altre basi che si formano in piccola quantità. Forse queste ultime potranno dare qualche schiarimento intorno all'andamento generale del fenomeno. Inoltre è da osservarsi che il nitrobenzolo ricuperato contiene piccole quantità di un composto aldeidico, che pel suo odore ricorda i prodotti di condensazione dell'aldeide. Può darsi però che i primi prodotti, che si formano dalla coppia nitrobenzolo ed alcool, sieno anilina ed aldeide acetica, che questa si condensi ed entri in reazione coll'anilina per dare la chinaldina e le altre basi non ancora determinate. Comunque sia da interpretarsi il complicato processo, rimane assodato che la sintesi dello Skraup, che ebbe una si alta importanza per lo sviluppo di un importante capitolo della chimica organica, è una reazione che si compie spontaneamente, anche senza l'intervento di catalizzatori energici quali sono gli acidi minerali.

Nitrotoluoli ed alcool assoluto.

Il contegno dei nitrotoluoli corrisponde a quello del nitrobenzolo, noi li abbiamo esperimentati tutti e tre ed abbiamo trovato che il miglior rendimento in prodotti basici, lo si ha col *metanitrotoluolo*. Gli altri due dettero quantità di basi così esigue da non permettere uno studio ulteriore; si può tuttavia ritenere accertato che l'andamento della reazione in tutti e tre i casi è qualitativamente lo stesso: si formano le corrispondenti metilchinaldine assieme alle toluidine.

Noi abbiamo esposto alla luce durante tutto il periodo estivo 10 gr. di ciascuno dei tre nitrotoluoli sciolti sempre in 50 c. c. d'alcool assoluto. Il trattamento successivo corrisponde perfettamente a quello ora descritto pel nitrobenzolo e non ha bisogno d'essere qui riportato. Il rendimento fu il seguente: dal m- nitrotoluolo si ebbero 1,1 gr. di cloridrato (cioè circa il 10 $^0/_0$ come dal nitrobenzolo), dagli altri due invece appena la metà cioè soltanto 0,5 gr. di cloridrato. In tutti e tre i casi, l'alcool distillato non conteneva aldeide acetica.

Le basi che abbiamo potuto riconoscere fra le sostanze provenienti dal *m-nitrotoluolo* furono la corrispondente *metilchinaldina* e la *m- toluidina*.

La prima venne separata facilmente allo stato di cloroplatinato, che si scompone verso i 260° (incominciando ad annerire verso i 230°), e che si mostrò identico al prodotto ottenuto dalla m-toluidina con paraldeide ed

acido cloridrico (1). La m- toluidina si ricavò dalle acque madri, e la si riconobbe alla colorazione rossa che l'acido nitrico produce nella sua soluzione solforica ed alla colorazione rosea che si ottiene col cloruro di calce e la soluzione eterea della base libera (2).

Contegno di alcuni altri nitroderivati aromatici in soluzione alcoolica.

La reazione che si compie fra il nitrobenzolo ed i nitrotoluoli e l'alcool non sembra possedere carattere generale, almeno finora non abbiamo trovato altre sostanze contenenti il residuo dell'acido nitrico suscettibili a dare l'analoga trasformazione.

Noi abbiamo, sempre nelle stesse condizioni, sperimentato con le seguenti sostanze: l'*ortodinitrobenzolo* ed il *metadinitrobenzolo* le *tre nitraniline* e la *nitronaftalina* ed in tutti questi casi, come l'anno scorso coll'*acido picrico*, non siamo stati in grado di ottenere quantità apprezzabili di prodotti basici.

Si formano sempre piccole quantità di materie coloranti brune, ma il prodotto impiegato resta inalterato quasi per intero. Se avviene riduzione o altra trasformazione, questa deve compiersi con tale lentezza da sottrarsi alla osservazione.

Contegno dell'o-nitropiperonalio.

Il nostro amico prof. Angeli ci fece notare che l'o-nitropiperonalio, come l'aldeide o-nitrobenzoica, non dà la sua bella ed importante reazione colla nitroidrossilammina e ci invitò a studiare il comportamento alla luce dell'aldeide o-nitropiperonilica per vedere se esso fosse analogo a quello dell'aldeide o-nitrobenzoica. Lo è realmente: l'o-nitropiperonalio per azione della luce si trasforma in *acido o-nitrosopiperonilico:*

$$C_6H_3\begin{cases} O_2CH_2 \\ CHO \\ NO_2 \end{cases} = C_6H_3\begin{cases} O_2CH_2 \\ COOH \\ NO \end{cases}$$

ed anche qui, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, la reazione avviene senza intervento di altre sostanze. Noi l'abbiamo studiata in soluzione benzolica, ma essa può compiersi anche in altri solventi. Impiegando l'alcool metilico od etilico si otterranno senza dubbio i corrispondenti eteri composti, come coll'aldeide o-nitrobenzoica, ma coll'o-nitropiperonalio la purificazione di queste sostanze riesce meno facilmente perchè si producono materie brune e

(1) Beilstein, IV, 329.
(2) Ibid. II, 474.

resinose. Noi ci siamo limitati per queste ragioni allo studio dell'acido nitroso-piperonilico.

Esponendo alla luce una soluzione di o-nitropiperonalio in benzolo (2 gr. in 50 c. c.), il liquido leggermente colorato in giallo, dopo breve tempo si colora in verde e dopo un giorno (l'esperienza venne fatta in dicembre) incomincia la separazione di cristalli gialli, che aderiscono alle pareti del tubo. Mentre aumenta la separazione dell'acido, il liquido va perdendo il suo colore verde e tende ad imbrunire. Non è conveniente attendere che la trasformazione sia completa, perchè l'acido nitrosopiperonilico, a differenza del nitrosobenzoico, si altera facilmente e, rimanendo a lungo esposto alla luce, diventa bruno. Per purificare il prodotto, si versa la parte liquida e si fa cristallizzare dall'etere acetico la parte solida, che aderisce alle pareti del tubo. L'acido o-nitrosopiperonilico si presenta in forma di piccoli aghetti gialli, riuniti in mammelloncini, che fondono scomponendosi fra i 160° e 165°.

È assai probabile che anche altre aldeidi aromatiche, che contengono il residuo nitrico in prossimità del gruppo aldeidico, subiscono alla luce una trasformazione simile a quella dell'aldeide o-nitrobenzoica ed o-nitropiperonilica. Sembra però che se il radicale aldeidico si trova in una catena laterale, quello nitrico non ha su di esso più alcuna influenza, perchè ad es. l'aldeide o-nitrocinnamica resta inalterata alla luce o per lo meno si modifica lentamente in altro senso.

Comportamento dell'acido o-nitrosobenzoico e dei suoi eteri composti.

Nella nostra pubblicazione dello scorso aprile [1] abbiamo fatto notare che se si lascia esposta alla luce per molto tempo l'aldeide o-nitrobenzoica in soluzione alcoolica, i cristalli di etere nitrosobenzoico, che si separano da principio, si vanno ridisciogliendo, perchè si formano altri prodotti. Su questa ulteriore trasformazione dell'acido nitrosobenzoico e dei suoi eteri siamo ora in grado di dare ulteriori schiarimenti.

Anzitutto vogliamo dire che l'acido o-nitrosobenzoico in soluzione benzolica resta quasi completamente inalterato anche se esposto alla luce per tutto il periodo estivo. Da 2 gr. di aldeide o-nitrobenzoica, sciolta in 10 c.c. di benzolo, abbiamo ottenuto, dopo nove mesi di insolazione, 1,85 gr. di acido nitrosobenzoico. Il resto era formato da materia resinosa nerastra. In soluzione alcoolica, metilica o etilica, la cosa è invece assai diversa, e tanto partendo direttamente dall'aldeide nitrobenzoica, che dall'etere (etilico) nitroso-benzoico, si ottiene una soluzione intensamente colorata in bruno rossastro, che contiene un'assai complicato miscuglio di sostanze. Noi abbiamo studiato

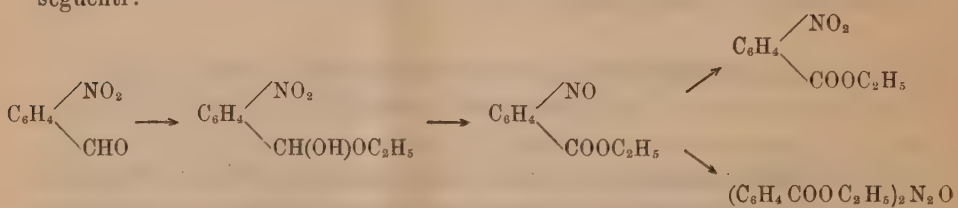
[1] L. c.

segnatamente i prodotti che si ottengono dalla soluzione di aldeide o-nitrobenzoica in alcool etilico, ma anche in questo caso non siamo certamente riusciti a determinare tutti i composti formatisi. L'alcool non sembra prendere parte alla reazione perchè non si formano quantità sensibili di aldeide; le sostanze che abbiamo potuto riconoscere sono le seguenti: l'*etere dietilico dell'acido azossibenzoldicarbonico* e l'*etere dell'acido nitrobenzoico*, inoltre poi l'*acido azossibenzoldicarbonico* e probabilmente anche piccole tracce di *etere antranilico*.

Quantitativamente predominano i due primi, il terzo si forma un po' più scarsamente; ma oltre a questi corpi si ottiene in notevole quantità una materia resinosa e sciropposa non determinabile.

Questa scomposizione dell'etere dell'acido o-nitrosobenzoico in soluzione alcoolica presenta la più grande analogia con quella del nitrosobenzolo colla liscivia di soda studiata assai accuratamente da Bamberger (1). Egli ottenne, assieme a molte altre sostanze, prevalentemente azossibenzolo e nitrobenzolo. Come egli fa giustamente osservare, si tratta qui di un processo di reciproca riduzione ed ossidazione e secondo tutte l'esperienze che abbiamo fatto fin ora, sono appunto questi i processi che la luce favorisce.

Le trasformazioni principali che si compiono dall'o- nitrobenzaldeide in *soluzione alcoolica* per azione prolungata della luce, sarebbero dunque le seguenti:



Ma oltre ai prodotti principali qui accennati, assai probabilmente molti altri se ne formeranno, come insegna lo studio fatto dal Bamberger sul contegno del nitrosobenzolo. L'alcool, si vede, esercita un'azione catalitica analoga a quella della soda caustica, ma mentre il primo a freddo ed all'oscurità sarebbe un debolissimo catalizzatore, l'azione della luce ne accresce l'attività. Molto probabilmente lo farà anche la temperatura. Per avere completo il quadro bisognerebbe studiare l'azione dell'alcool sul nitrobenzolo alla luce e quello degli alcali sull'acido nitrosobenzoico.

Noi abbiamo lasciato esposto alla luce per tutta l'estate un tubo contenente 10 gr. di o-nitrobenzaldeide sciolti in 100 c.c. d'alcool assoluto. I cristalli che si formano da principio, come s'è detto, a poco a poco si vanno ridisciogliendo mentre il liquido prende un colore rossastro sempre più cupo; alla fine diventa quasi nero, ma i cristalli dell'etere nitrosobenzoico, colla

(1) Berichte 33, 1939 (1900).

concentrazione impiegata, non si sciolgono completamente; la parte dell'etere rimasta inalterata era di 1,9 gr. Distillando l'alcool, che non contiene quantità apprezzabili d'aldeide, resta indietro uno sciroppo rossobruno, che, a poco a poco, in parte si solidifica (8,5 gr.). Esso venne estratto a caldo successivamente con etere petrolico e con benzolo.

La parte solubile nell'etere petrolico è un olio intensamente colorato in rosso, in cui si vanno formando dei cristalli. Questi vennero liberati con carbonato sodico da una piccola quantità di una materia acida, che non abbiamo potuto ottenere in quantità sufficiente per essere riconosciuta, e poi purificati dall'etere petrolico. Si presentano in forma di prismi ramificati, lievemente colorati in carnicino, che fondono a 81-82°. Essi hanno la composizione dell'*etere dietilico dell'acido o-azossibenzoldicarbonico* (oppure *o- azossibenzoico*) e sebbene questo etere non sia stato ancora descritto, non v'ha dubbio che tale debba essere la loro costituzione. La parte oleosa dell'estratto coll'etere petrolico, venne distillata a pressione ridotta e passò a 17 mm. a 155-160°. Malgrado la distillazione l'olio mantiene un intenso colore rosso, che è dovuto ad una impurità, perchè esso è formato prevalentemente dall'*etere etilico dell'acido o-nitrobenzoico* e da piccole quantità di *etere etilico dell'acido o-amidobenzoico*. Trattando la soluzione eterea del prodotto con acido cloridrico gassoso, quest'ultimo si separa in forma di cloridrato. La quantità di materia ottenuta non era tale da potere essere analizzata, ma crediamo di non andare errati affermando che fra i prodotti di trasformazione dell'etere nitrosobenzoico si trovi anche l'etere antranilico. Esso corrisponderebbe all'anilina, che Bamberger ebbe, pure in quantità piccola, dal nitrosobenzolo. L'etere etilico dell' acido o-nitrobenzoico fonde a 30° (1), ma a noi sembrò più conveniente di passare all'acido ed analizzare quest'ultimo. L'abbiamo ottenuto dall'etere per idrolisi con acido cloridrico e purificato dall'acqua bollente. L'acido o- nitrobenzoico ricavato in quantità relativamente cospicua, fondeva a 148° in corrispondenza con Widmann, che trovò 147°.

La parte del prodotto solubile nel benzolo è formata da una materia bruna resinosa da cui non abbiamo potuto ottenere sostanze cristallizzate.

Finalmente il residuo insolubile nell'etere petrolico e nel benzolo costituisce una materia solida grigiastra, da cui per trattamento con alcool metilico e nero animale, abbiamo potuto ottenere una sostanza cristallizzata in in tavolette appena leggermente colorate in giallo, che fondono con decomposizione a 248°. Essa ha la composizione dell'*acido o-azossibenzoldicarbonico*, a cui corrisponde per tutte le sue proprietà (2). La formazione di

(1) Balstein 2, 1230.

(2) L'acido o- azossibenzoldicarbonico (oppure o-azossibenzoico) (Beilstein, IV, 1343) è descritto da Armaschewsky come una sostanza cristallizzata in tavole colorate in *giallo*

questo acido è dovuta senza dubbio all'acido o-nitrosobenzoico, che si produce sempre assieme al suo etere etilico, in quantità più o meno grande, quale prodotto primario d'insolazione dell'aldeide o-nitrobenzoica, anche in soluzione alcoolica. Dopo quanto s'è detto, si sarebbe potuto aspettarsi di riscontrare fra i prodotti di ulteriore trasformazione, anche l'acido o-nitrobenzoico; ma questo sembra mancare, e però bisogna ammettere che l'acido nitrosobenzoico riducendosi ad acido azossibenzoico ceda parte del suo ossigeno all'etere nitrosobenzoico per dare l'etere nitrobenzoico, che è realmente dopo la resina il prodotto che si forma in quantità maggiore.

Anatomia. — *Sopra gli organi renali delle Salpidi.* Nota del Socio Todaro.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Micro-fotografie di fibre muscolari a luce semplice e polarizzata, allo stato di riposo e di contrazione.* Nota del Socio straniero Th. W. Engelmann.

Prego l'Accademia dei Lincei di accettare alcune *micro-fotografie di fibre muscolari*, che mi sembrano essere non senza valore, perchè dimostrano alcuni fatti importanti per la dottrina della contrazione muscolare.

Le fibre muscolari volontarie o striate sono composte principalmente da fibrille tenuissime, che nella contrazione si raccorciano senza cambiamento di volume. In ciascuna di queste fibrille si può distinguere, regolarmente alternantisi, due sorta di segmenti: isotropi o monorifrangenti, e anisotropi o birifrangenti. Esistono anche altre differenze fisiche, chimiche e morfologiche fra i due. Nella sostanza isotropa si distinguono p. e. ancora quattro differenti sostanze.

La fotografia N. I mostra questa struttura complicata, come si presenta in luce ordinaria al microscopio, in una fibra muscolare di uno scarabeo allo stato di riposo.

La figura N. II mostra la stessa fibra; a sinistra in luce ordinaria, a destra in luce polarizzata. Si vede che gli strati di sostanza isotropa sono molto più alti che le strie birifrangenti. Ciò vuol dire che allo stato di riposo la più gran parte del volume delle fibrille muscolari è isotropa.

---

bruno, che fonderebbero secondo Homolka a 237-242°. Noi abbiamo preparato il composto secondo le indicazioni di Pietro Griess (Berichte 7, 1611) dell'acido o-nitrobenzoico, e l'abbiamo ottenuto con proprietà perfettamente identiche a quelle sopraindicate.

Ma questo cambia durante la contrazione. Quanto più la fibra si accorcia, tanto più il volume della sostanza anisotropa (V_a) aumenta e diminuisce il volume della sostanza isotropa (V_i). Il volume totale delle due sostanze resta lo stesso.

Questi fatti fondamentali sono illustrati dalla fotografia N. III. Essa mostra una fibra muscolare dello scarabeo *Chrysomela coerulea* che contiene un'onda di contrazione. A destra si vede l'immagine a luce polarizzata (fra due prismi di Nicol incrociati), a sinistra a luce ordinaria.

Il rapporto V_i/V_a, che nello stato di riposo ha un valore di 1,5 a 2,0, diminuisce fino a 0,3 e anche meno nello stato di contrazione massima.

A un certo raccorciamento corrisponde sempre un medesimo valore del detto rapporto.

La fotografia N. IV mostra una fibra in contrazione molto avanzata. Il rapporto volumetrico anzi detto è circa 0,3. Ma si vede ancora un altro fatto importante, cioè: il potere rifrangente della sostanza anisotropa è molto meno grande che quello della sostanza isotropa. Nello stato di riposo ha luogo il contrario, come mostrano le fotografie N. I e II.

Si può provare che durante la contrazione la sostanza anisotropa, in misura dell'aumento di volume e della diminuzione del potere rifrangente, diviene più molle e più estensibile, mentre che la sostanza isotropa diviene più dura e meno estensibile.

Queste alterazioni di volume, di potere rifrangente, di solidità e di estensibilità opposte nelle due sostanze, si spiegano colla ipotesi, che nella contrazione ha luogo un passaggio di acqua dalla sostanza isotropa nella sostanza anisotropa. La sostanza anisotropa si gonfia per imbibizione d'acqua, sostratta alla sostanza isotropa.

La fotografia N. V, infine, mostra che le alterazioni ora descritte, s'iniziano nelle terminazioni nervose. Si vede una *collina nervosa* (N) da cui parte un'onda di contrazione. La contrazione è la più avanzata immediatamente sotto la collina nervosa, e va degradando dal margine sinistro al margine destro della fibra (*contrazione laterale*).

Meccanica. — *Sopra alcuni particolari movimenti di un punto in un piano.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio Volterra.

Matematica. — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. I. Boggio, presentata dal Socio V. Cerruti.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le deformazioni del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Fisica. — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. Marcacci, presentata dal Socio Luciani.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull' influenza di basse temperature sulla variazione di resistenza del selenio per effetto della luce.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Socio Blaserna.

È da tempo (1) noto che uno strato di selenio, quando sia stato sottoposto ad uno speciale trattamento (2), gode della proprietà che la sua resistenza elettrica diminuisce notevolmente se esso viene colpito da un raggio di luce.

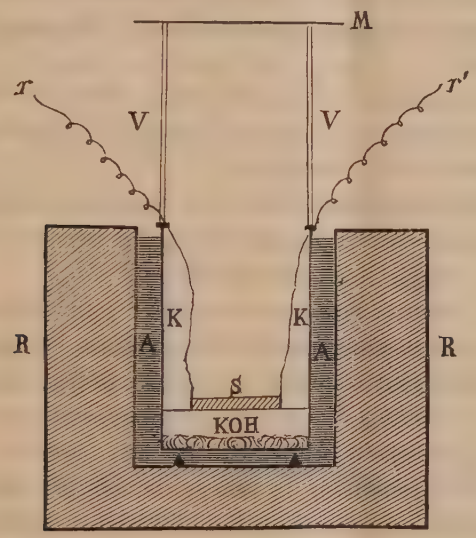
Le spiegazioni che sogliono darsi di questo abbassamento di resistenza per effetto della luce sono varie: Siemens (3) crede che questa specie di selenio che presenta la notevole proprietà sia costituita da un miscuglio di due modificazioni allotropiche, una conduttrice metallicamente, l'altra cristallina e che l'azione della luce consista in una trasformazione di quest'ultima modificazione, ancora sussistente, nella prima. Hesehus (4) ammette pure il miscuglio di due modificazioni, ma crede che la luce ne dissoci una e questa allora conduca meglio l'elettricità. Bidwell (5) ed altri, notando che il selenio puro non conduce e che d'altra parte il trattamento per rendere sensibili alla luce i preparati di selenio necessita il portare dei metalli in contatto con questo, credono che la conducibilità del selenio sia da ascriversi al fatto che in esso ordinariamente si trovano impurità metalliche e che la luce renda possibile la formazione di seleniuri metallici conduttori.

(1) Sill. Journ. 5, 1873, pag. 301.
(2) Beibl. 5, pag. 316.
(3) Pogg. Ann. 159, pag. 117.
(4) J. de la Soc. phys. chim. russe, 1884, pag. 146.
(5) Phil. Mag. (5), 20, pag. 178, 1885.

Più complicate ancora sono le teorie di Uljanin (1) e di Kalischer (2) che tendono a spiegare oltre questo fenomeno anche il comportamento del selenio esposto alla luce rispetto ad altri fenomeni.

Ho pensato che avrebbe potuto essere di qualche interesse pel decidere fra queste varie teorie, il vedere come questo fenomeno si comportasse a basse temperature come quella d'ebollizione dell'aria liquida, alla quale, per esempio, la quasi totalità delle reazioni chimiche non avvengono più, e che in ogni modo la ricerca avrebbe anche di per sè presentato qualche interesse.

A tale scopo mi sono fatto costruire dal noto meccanico Richard Müller-Uri di Braunschweig una cellula al selenio di piccole dimensioni e che presentasse un notevole abbassamento di resistenza sotto l'influenza della



luce. Questa cellula presenta una superficie sensibile di circa 2 cm. quadrati; in essa il selenio è steso su una lastra di lavagna fra dei sottili fili di rame.

Per poter portare questa cellula alla temperatura di ebollizione dell'aria liquida, mi sono costruito un recipiente speciale il cui disegno è riportato nella qui annessa figure.

Un recipiente di latta cilindrico R a doppie pareti, con l'intercapedine fra queste riempita di lana ben secca, pressata e poi chiusa a stagno, serve a contenere l'aria liquida A. Entro questa trovasi immerso un secondo recipiente K cilindrico di latta, contenente sul fondo dei pezzi di potassa caustica e un po' più su un diaframma a sfregamento dolce, tutto bucherellato che sostiene la cellula al selenio S. Superiormente questo recipiente K termina in un manicotto V di vetro, masticiato al sottostante K; attraverso due fori

(1) Wied. Ann. 34, pag. 247, 1888.
(2) Wied. Ann. 32, pag. 108, 1887.

nella masticiatura passano i due reofori r_1 r' della cellula S. Il manicotto V di vetro è chiuso poi superiormente da una lamina M di mica ben trasparente, che serve mediante un'altra masticiatura a chiudere ermeticamente il recipiente cilindrico così formato e in cui viene a trovarsi la cellula al selenio. La potassa caustica, assorbendo l'anidride carbonica e l'umidità contenuta nell'aria, preservava dal pericolo che queste venissero condensate dalla bassa temperatura e formassero nell'interno del recipiente una nube assorbente i raggi luminosi. Di più, grazie a quel collare di vetro V, non si avevano al l'esterno delle superfici metalliche irraggianti.

Come sorgente di luce mi servii di un arco voltaico a mano alimentato da una corrente alternante a 50 Volta.

Quest'arco trovavasi situato sopra la lamina di mica M, e la luce da esso emanante veniva concentrata mediante una lente propria sulla superficie sensibile del selenio.

La cellula era inserita nel circuito di un elemento Warren de la Rue contenente un galvanometro Déprez et d'Arsonval di 100 Ohm. di resistenza, fortemente shuntato ed un interruttore.

Il metodo seguito per determinare la resistenza della cellula è in fondo quello di sostituzione, unico applicabile in misure per loro natura poco precise di quantità troppo variabili da un momento all'altro.

Si dava allo shunt un conveniente valore e poi si leggevano le deviazioni al galvanometro, quando si chiudeva il circuito colla cellula illuminata o con la cellula non illuminata; e questa operazione si fece per varî valori dello shunt, sia quando la cellula trovavasi alla temperatura ordinaria, sia quando trovavasi alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida.

In ultimo poi si determinò la sensibilità del galvanometro sostituendo alla cellula a selenio una resistenza di 5000 Ohm, e variando eventualmente lo shunt al galvanometro in modo da poter avere all'incirca le stesse deviazioni che si avevano quando era inserita la cellula.

L'aria liquida gentilmente fornitami dal dott. D. Helbig dell'Istituto Chimico dell'Università, veniva conservata durante l'esperienza entro appositi recipienti del Dewar, dai quali poi si travasava nell'interstizio A fra i due recipienti R e K al momento dell'esperienza e durante la medesima per modo che la parte metallica del recipiente K fosse sempre completamente sommersa. In tal modo un litro di aria liquida durò per circa tre quarti d'ora.

I risultati delle misure compiute si possono riassumere così:

Temperatura ordinaria.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 31000$ Ohm.
" " " alla luce $r_1 = 18000$ "

Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0,4$

Temperatura d'ebollizione dell'aria liquida.

Resistenza della cellula nell'oscurità $r = 2600$ Ohm.
» » » alla luce $r_1 = 1900$ »
Effetto fotoelettrico $\frac{r-r_1}{r} = 0{,}3$.

Come si vede, alla temperatura d'ebollizione dell'aria liquida l'effetto fotoelettrico non scompare, anzi la sua variazione è abbastanza piccola, ciò che rende un po' difficile il ricondurre questo effetto della luce ad una azione chimica.

In ultimo noto come il coefficiente di temperatura della resistenza elettrica del selenio conduttore sia illuminato che non illuminato, abbia per questo intervallo di temperatura: 15° — 185°, un valore all'incirca eguale a 0,004, cioè un valore quasi eguale a quello dei metalli.

Chimica. — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. Peratoner, presentata dal Socio E. Paternò.

Geologia. — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.* Nota di Alessandro Martelli, presentata dal Corrisp. De Stefani.

Zoologia. — *Ricerche osmotiche sugli Infusori.* Nota del dott. Paolo Enriques, presentata dal Socio Emery.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Nota I di Alessandro Coggi, presentata dal Socio Emery.

Son passati più di dieci anni da che ho comunicato in questi Rendiconti [1] i risultati di parziali ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini in *Torpedo* e alcune mie idee sulle probabili omologie di questi organi peculiari dei Selaci con organi che si riscontrano in altri ordini di Pesci.

[1] *Sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini.* Questi Rendiconti, vol. VII, 2° sem., fasc. 7°, 1891.

Al primo convegno dell' Unione Zoologica Italiana in Bologna (settembre 1900) ho dimostrato su preparati microscopici, alcuni stadî iniziali dello sviluppo delle ampolle in *Torpedo* e la possibilità di distinguere già in embrioni squaliformi di 15 mm. le ampolle stesse dagli abbozzi degli organi di senso laterale (canali o vescicole di Savi). Mentre questi, infatti, si mantengono costituiti di un unico strato di cellule, per quanto alte e specificamente modificate, fino a stadî avanzati di sviluppo e quando l' ectoderma è bistratificato, quelle invece si mostrano composte, fino dal loro primo annunziarsi, da più strati cellulari. Questa differenza di costituzione trae la sua origine dalla maniera e dal tempo diversi in cui le due qualità di organi si formano, e ci invita pure ad annetter loro un diverso significato morfologico.

Le osservazioni e le conclusioni portate da lavori recenti nei quali è trattato, di proposito o per incidenza, delle ampolle di Lorenzini in varie specie di Selaci, mi obbligano ad anticipare in questa Nota la pubblicazione dei risultati di mie ricerche ulteriori sullo stesso argomento.

Disposizione, numero e partizione delle ampolle. — Nelle torpedini adulte le ampolle propriamente dette sono riunite in tre gruppi in ciascuna metà del corpo: un gruppo anteriore dorsale, innanzi e in dentro degli occhi; un gruppo anteriore ventrale, innanzi alle narici, situato sotto al primo e da questo imperfettamente separato per mezzo di una membrana tendinosa; un gruppo posteriore appoggiato alla cartilagine del propterigio, sul contorno esterno dell'organo elettrico, fra la linea segnata dalla rima boccale e la linea che passa per le due prime fessure branchiali. Gli sbocchi dei dotti ampollari invece sono distribuiti lateralmente agli occhi, intorno alle aperture nasali, e presso al margine antero-laterale delle due faccie del corpo. Una partizione delle ampolle fondata sul loro raggruppamento, o sulla disposizione degli sbocchi non avrebbe che una importanza topografica. Più razionale invece ne riesce la partizione fatta sul criterio della loro innervazione, tanto più che con esso si accordano i fatti dello sviluppo.

Ecco quanto mi risulta da dissezioni di individui adulti e di grossi embrioni di *T. ocellata* e dalle ricostruzioni di tagli di giovani embrioni.

I nervi che provvedono le ampolle appartengono tutti al *N. facialis* [1] e precisamente a quei rami di esso che innervano anche gli organi di senso

[1] Nella mia Nota del '91 non tenni conto della importante scoperta di Marshall e Spencer che la *portio major* del *R. ophthalm. sup.* è la *portio facialis* dello stesso ramo, e inoltre che il *R. buccalis* appartiene, almeno per gran parte, al facciale; riparai alla mancanza in un mio lavoro successivo (*Un'anomalia in un embrione di Selacio.* Mem. Acc. Scienze Bologna, ser. V, tom. II, 1892). Così ritenni allora che sì le ampolle come gli organi di senso laterale fossero innervati dal trigemino, come parecchi autori di trattati e di lavori speciali ritengono tuttora.

laterale: *R. ophthalmicus superficialis portio facialis*, *R. buccalis* e *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo anteriore dorsale è costituito:

a) da 6-7 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia dorsale del corpo, allato e in fuori dell'occhio, e che sono innervate da branche (1) del *R. ophthalm. superf.*;

b) da 2-3 ampolle i cui dotti sboccano lateralmente in fuori del canale laterale dietro alla commessura post-auriculare, fra mezzo a tubuli dello stesso canale, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

c) da 15 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi presso al margine antero-laterale della faccia dorsale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandib. ext.*

Ciascun gruppo anteriore ventrale si compone:

d) di 11 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia ventrale del corpo intorno alle narici, e che sono provvedute da una branca del *R. ophthalm. superf.*;

e) di 2-3 ampolle i cui dotti sboccano sul margine anteriore della faccia ventrale del corpo, e che sono provvedute da una branca del *R. buccalis*;

f) di 15 ampolle i cui dotti sboccano presso al margine antero-laterale della faccia ventrale del corpo e che sono innervate da una branca del *R. mandibularis externus*.

Ciascun gruppo posteriore è costituito:

g) da 18 ampolle i cui dotti hanno i loro sbocchi sulla faccia dorsale del corpo, presso al contorno della pinna pettorale, lateralmente e indietro dell'organo elettrico, e che sono innervate da una branca del *R. mandib. externus*;

h) da 15 ampolle i cui dotti sboccano sulla faccia ventrale del corpo, in fuori e in dietro del contorno esterno dell'organo elettrico, e che son provvedute da una branca del *R. mandibularis externus*.

Tutto sommato *Torpedo ocellata* ci presenta non meno di 168 ampolle (2) distribuite in 8 sottogruppi. Di esse almeno 130 sono innervate da parecchie branche del *R. mandib. ext.*, 34-36 da due branche del *R. ophthalm. sup. facialis*, e solo 4-6 da una esile branca del *R. buccalis*.

Epoca e luogo di formazione delle ampolle. — Finora lo sviluppo delle ampolle non è stato seguito estesamente ed esattamente in alcuna specie di Selacio.

(1) Adopero qui impropriamente la parola « branca » affibbiandole un significato d'ordine inferiore a quello che essa ha nella lingua italiana. Lo faccio provvisoriamente per maggior chiarezza di esposizione.

(2) Questo numero non deve ritenersi assoluto; esso potrà essere diverso, dipendentemente da variazioni individuali. Credo, a ogni modo, ch'esso rappresenti un *minimum*.

Per quanto riguarda *T. ocellata*, i sottogruppi di ampolle numerati sopra non si formano contemporaneamente durante lo sviluppo embrionale; e nè meno è contemporanea l'apparizione delle ampolle appartenenti ad uno stesso sottogruppo. In generale esse si sviluppano isolatamente in ogni sottogruppo, salvo pei sottogruppi più numerosi ove si può verificare lo sviluppo contemporaneo di un certo numero di ampolle (dipendentemente, come si vedrà in seguito, dalla disposizione che assumono i nervi destinati a provvederle).

A cominciare da embrioni squaliformi di 12 mm. di lunghezza fino ad embrioni raiformi di 27 mm., ininterrotta, sebbene irregolarmente intensa, è la formazione di nuove ampolle.

Prime a mostrarsi sono le poche ampolle del sottogruppo *b*. Se ne può constatare l'inizio in embrioni squaliformi di 12 mm. lateralmente in basso sull'arco ioideo, presso il solco che separa quest'ultimo dall'arco mandibolare. Sono le prime *ampolle ioidee* o *io-mandibolari*. Il nervo che le provvede è una breve ed esile branca del *R. mandib. ext.*, la prima branca inviata da questo ramo e che non sia destinata ad organi di senso laterale.

In embrioni squaliformi di 15 mm. appariscono, pure sull'arco ioideo, sotto a quelle del sottogruppo *b*, le prime ampolle del sottogruppo *g* (*ampolle ioidee* o *io-mandibolari*). In embrioni squaliformi di 16 mm. è già segnata, dietro all'occhio, all'altezza del cristallino, qualcuna delle poche ampolle del sottogruppo *e* provveduta da una branca esilissima del *R. buccalis* (*ampolle infraorbitali* o *boccali*). In embrioni squaliformi di 18 mm., innanzi e sotto all'occhio, è chiara la formazione delle prime ampolle innervate dal *R. ophthal. superf.*, e precisamente quelle appartenenti al sottogruppo *a* (*ampolle sopraorbitali* od *oftalmiche*); e nello stesso stadio appariscono sull'arco mandibolare, subito dietro alle ampolle del sottogruppo *e*, le prime ampolle del sottogruppo *c* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*), e sull'arco ioideo le prime del sottogruppo *h* (*ampolle ioidee* od *io-mandibolari*), le une e le altre innervate da branche diverse del *R. mandib. ext.* Le ampolle del sottogruppo *d* (*sopraorbitali* od *oftalmiche*) fanno la loro prima comparsa, sotto all'occhio, in embrioni squaliformi di 19 mm. Quelle del sottogruppo *f* (*ampolle mandibolari* o *io-mandibolari*) cominciano a differenziarsi, sulla faccia ventrale dell'arco mandibolare, circa nello stesso stadio.

Tutti i sottogruppi sono chiaramente, se non completamente, rappresentati in embrioni squatiniformi di 20,5 mm.; nuove ampolle continuano a formarsi in ciascuno di essi, eccetto che nei piccoli sottogruppi *b* ed *e*. Ma specialmente continua è l'aggiunta di nuove ampolle nei sottogruppi *g* e *h* fino in embrioni di 27 mm. Di questi sottogruppi fan parte le ampolle i cui dotti sboccano nei punti più periferici delle due superficie del corpo.

Materiale per la formazione delle ampolle. — Nella mia Nota del '91 ebbi occasione di rilevare che le ampolle si sviluppano a fianco degli abbozzi degli organi di senso laterale, e solo di certuni fra essi. Ora posso

aggiungere e precisare meglio che *le ampolle cominciano ad apparire quando le quattro porzioni principali di cui è costituito l'intero apparato di senso laterale* (linea sopraorbitale, linea infraorbitale, linea io-mandibolare e linea laterale) *son già chiaramente abbozzate* e ch'*esse si formano a spese di tratti ectodermici che sono contigui e fiancheggiano, a dir così, quelli di tali abbozzi che son destinati a divenire i canali sensitivi* (*o vescicole*) *del capo*. Ne è esclusa quindi la linea laterale pr. detta, a fianco della quale non si forma alcuna ampolla; ciò che si può già dedurre da quanto è precedentemente esposto circa la posizione che hanno le ampolle al loro primo apparire e circa i nervi che le provvedono.

Le quattro porzioni dell'apparato di senso laterale sono già abbozzate in embrioni squaliformi giovanissimi di *T. ocellata*, quando l'ectoderma è ancor fatto di un unico strato cellulare. Esse si manifestano come tratti o striscie ectodermiche a cellule alte, stipate e con nuclei allungati, mentre le cellule dell'ectoderma ordinario (salvo regioni ove si formano organi speciali, transitorî o permanenti) sono molto più basse e pressochè tanto alte quanto larghe. E il passaggio fra le due forme di cellule è graduale.

Non è giusto dunque continuare a ripetere, come ha fatto recentemente anche Allis (1), l'affermazione di Balfour, che nella formazione degli abbozzi degli organi di senso laterale pigli parte solo lo strato mucoso o profondo dell'ectoderma. La cosa apparisce effettivamente così, solo quando le cellule dell'ectoderma ordinario si dispongono nei due strati caratteristici, mentre quelle degli abbozzi degli organi di senso si mantengono disposte su uno strato solo (e ciò durante una certa serie di stadî embrionali).

Ma anche quando gli abbozzi degli organi di senso laterale si possono manifestare come differenziamento dello strato profondo, i loro margini laterali passano gradatamente all'ectoderma ordinario bistratificato; e ciò avviene a mezzo di cellule discretamente alte, prima disposte alternate, poi su due strati. Per modo che ogni striscia ectodermica, rappresentante l'abbozzo di una porzione dell'apparato di senso laterale, è limitata ai suoi fianchi da ectoderma che non è fatto come l'ectoderma ordinario, ma nè meno può dirsi che faccia parte dell'apparato sensitivo.

Or bene, *è a spese di questo ectoderma che fiancheggia gli abbozzi dell'apparato di senso laterale che si formano le ampolle*. Non sempre però. Ci sono lunghi tratti di essi, a fianco dei quali non si sviluppa alcuna ampolla. Per esempio, a non tener conto della linea laterale, tutto il tratto dorsale della linea sopraorbitale e quasi tutta la linea infraorbitale. Ciò di-

(1) E. Ph. Allis, *The Lateral Sensory Canals, the Eye Muscles, and the Peripheral Distribution of certain of the Cranial Nerves of Mustelus laevis*. Quart. Journ. Micr. Sc., vol. 45, p. 2, N. S., pag. 91.

mostra che *la formazione delle ampolle non è dovuta ad attività propria di questo ectoderma, ma che la causa risiede fuori di esso.*

Primi momenti dello sviluppo delle ampolle. — In tagli frontali di embrioni di *T. ocellata* di 12 mm. dietro all'abbozzo della linea io-mandibolare, di embrioni di 16 mm. dietro all'infraorbitale, di embrioni di 18 mm. innanzi alla sopraorbitale, si possono constatare accenni di ampolle in relazione con esilissime branche inviate dai rami nervosi che rispettivamente provvedono quelle porzioni dell'apparato di senso laterale. Siffatte branche sono accompagnate da nuclei in prossimità del ramo da cui si dipartono, e anche per un certo tratto del loro cammino immediatamente sotto all'ectoderma, ma poi sono esclusivamente costituite da sottilissimi filamenti protoplasmatici (cilindrassili embrionali) i quali giungono fino alle cellule dello strato profondo dell'abbozzo ampollare, e forse penetrano fra di esse. L'abbozzo ampollare in questo stadio è pluristratificato, perchè fra lo strato profondo ch'è continuazione dello strato profondo dell'ectoderma e lo strato superficiale si sono insinuate altre cellule derivate del primo.

In tagli di embrioni rispettivamente un po' più giovani, nelle regioni corrispondenti a quelle su menzionate, non si osservano che sottili filamenti protoplasmatici, i quali dal ramo nervoso che provvede l'apparato di senso laterale e che gli è contiguo, si possono seguire, immediatamente sotto all'ectoderma, fino agli abbozzi delle ampolle; le quali allora sono costituite da due soli strati cellulari.

Però, in embrioni più avanzati rispettivamente a quelli citati sopra, i nuclei si sono inoltrati lungo i filamenti protoplasmatici inviati dai singoli rami nervosi e si sono avvicinati agli abbozzi ampollari, sotto ai quali si accumulano talvolta, anche in seguito a moltiplicazione, e formano una espansione a mo' di clava. Questi abbozzi si possono ben dire allora giovani ampolle, perchè hanno già cominciato a individualizzarsi corrispondentemente alle branche nervose che loro arrivano, e anche perchè gli elementi cellulari che li costituiscono hanno assunto disposizioni peculiari; sulle quali dirò più innanzi.

Voglio, invece, mettere subito in rilievo che le ampolle si formano dall'ectoderma in corrispondenza di altrettante sottili branche nervose loro inviate dagli stessi rami che dànno branche anche agli organi di senso laterale. Ma convien distinguere. Le branche nervose che provvedono questi ultimi organi hanno i loro punti di accrescimento negli abbozzi degli organi stessi, i quali, fino al loro completo sviluppo, servono loro da matrice. La cosa pare indubitata ora che ricerche recenti, eseguite su materiale vario, son venute ad appoggiare l'antica affermazione di Goette e Semper circa la derivazione diretta del *R. lateralis vagi* dall'ectoderma.

È a ritenersi adunque che il sistema dei nervi dell'intero apparato di senso laterale ha la sua origine nell'apparato stesso; come suol dirsi, la

sua formazione è centripeta. Ma mentre si può senz'altro considerare come tale la formazione del *R. lateralis vagi*, altrettanto semplicemente non può dirsi che siano costituiti gli altri tre rami del sistema: *R. ophthalm. superf.*, *R. buccalis* e *R. mandibul. ext.*; nella composizione dei quali entrano bensì, per gran parte, nervi di senso laterale, e che si originano nella stessa maniera che il *R. lateralis*, ma essi comprendono anche i nervi che vanno alle ampolle.

E questi nervi ampollari, a giudicare dal loro primo manifestarsi in forma di sottili filamenti protoplasmatici, e dalla posizione rispettiva che in essi occupano i nuclei negli stadî embrionali su contemplati, non possono che formarsi in direzione centrifuga. E poichè, a cominciare dall'abbozzo ampollare, il loro decorso può essere seguito prima sotto all'ectoderma (e più o meno accosto ad esso, secondo il grado di sviluppo), poi, in unione con una branca nervosa del vicino organo di senso laterale, fino al ramo di cui questa branca fa parte, ne viene la conclusione che *i rami nervosi di senso laterale e le singole branche che li collegano con gli apparati periferici possono servire come vie di conduzione per i nervi che provvedono le ampolle*. Le quali solo in tanto si sviluppano in certi tratti del peculiare ectoderma che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, in quanto vi arrivino filamenti nervosi o cilindrassili embrionali. *Son questi nervi che danno occasione al formarsi delle ampolle*. Siamo autorizzati a concludere così dal fatto che in ben lunghi tratti di quell'ectoderma ove non giungono filamenti nervosi, ampolle non si sviluppano affatto.

Differenziamento ulteriore delle ampolle. — Subito dopo che nervi embrionali hanno raggiunto il peculiare ectoderma bistratificato (*stadio di ampolla indifferente*) che fiancheggia gli abbozzi degli organi laterali, avvengono in questo ectoderma le seguenti modificazioni.

1. Fra lo strato profondo e quello superficiale si insinuano cellule che provengono dal primo e si moltiplicano *in situ*, e riducono l'abbozzo ampollare tri-o pluristratificato (*stadio di ispessimento ectodermico*).

2. Le cellule dello strato profondo divengono alte, piramidate e si ordinano in un settore sferico, a convessità interna, intorno ad un centro nel quale esse convergono con le loro estremità assottigliate. I nuclei ovali hanno la stessa direzione dei corpi cellulari rispettivi e ne occupano la porzione periferica o basale. Questo speciale ordinamento si verifica in corrispondenza di ogni nervo ampollare. È lo *stadio di ampolla individualizzata*; nella quale le cellule basali disposte a settore sferico son destinate a formare l'ampolla propriamente detta. Al di sopra di esse si moltiplicano attivamente le cellule che la separano dallo strato superficiale.

In questo stadio le ampolle possono presentarsi:

o riunite in gruppi, assai vicine le une alle altre, quasi esse si fossero moltiplicate per scissione contemporanea di ampolle preesistenti, come av-

viene sull'arco ioideo per le ampolle che formeranno parte dei sottogruppi *g* e *h*; allora la branca nervosa del sottogruppo si è suddivisa in modo arborescente in tante sottobranche di cui ognuna fa capo ad un'ampolla;

o disposte in serie lineare, come le ampolle oftalmiche dei due sottogruppi *a* e *d*; allora la branca nervosa dopo aver provveduto un'ampolla, decorre oltre, parallelamente al vicino apparato di senso laterale a provvederne una seconda, una terza e così via.

3. In corrispondenza del centro in cui convergono le alte cellule dell'ampolla propriamente detta apparisce una piccola cavità, nella quale confluiscono poi altre cavità formantisi fra le cellule, immediatamente soprastanti, degli strati intermedî dell'abbozzo ampollare. La cavità unica diventa conica o piriforme, con la parte sottile compresa fra le alte cellule dell'ampolla propriamente detta. È lo *stadio di ampolla cava.* E per quanto sembra, la formazione della cavità è dovuta a disfacimento del plasma delle cellule, specialmente degli strati intermedî, che in quel punto, in seguito a continuata moltiplicazione, si comprimono a vicenda ed esercitano pressione anche sulle alte cellule dell'ampolla propriamente detta.

4. La cavità ampollare si allunga e le cellule degli strati intermedî le si dispongono intorno a formarle una doppia parete. È l'inizio del *dotto ampollare.* Lo strato epidermico superficiale, che non piglia parte alla formazione della parete del dotto, permane per qualche tempo.

5. Segue l'*allungamento del dotto ampollare*, ossia l'affondamento dell'ampolla nel mesenchima, obliquamente o parallelamente al tegumento, e nella stessa direzione donde le viene il nervo. Il lume del dotto è sottile, mentre la cavità dell'ampolla è larga e sferica. L'allungamento è dovuto, oltre che alla moltiplicazione delle cellule delle pareti del dotto, ad accrescimento e parziale introflessione degli strati profondi dell'ectoderma nel punto d'attacco. Quivi il dotto subisce una dilatazione; lo strato epidermico superficiale vien sollevato a volta e finisce per rompersi. Si forma così lo *sbocco ampollare.*

6. Ulteriori modificazioni avvengono nell'ampolla propriamente detta, prima per dilatazione della sua cavità, poi per la formazione di insaccature (al numero di sei in *Torpedo*) disposte in ordine circolare intorno al fondo dell'ampolla. È lo stadio definitivo di *ampolla con placca centrale e otricoli.*

Le ampolle in altre specie di Selaci. — La successione dei differenziamenti che presentano le ampolle in *Torpedo* durante il loro sviluppo, come è esposta qui sopra, riesce a conferma di gran parte delle mie ricerche del '91, ma le corregge per quel che riguarda gli stadî iniziali. Ed essa si scosta in più d'un punto da quella stabilita in un recente lavoro di Minckert [1] su serie incomplete di embrioni di *Spinax niger* e *Acanthias vulgaris.*

[1] W. Minckert, *Zur Topographie u. Entwicklungsgeschichte d. Lorenzini'schen Ampullen.* Anatomischer Anzeiger XIX Bd. n. 20, 1901.

Questo lavoro uscito dall'Istituto Zoologico di Jena e manchevole specialmente ri-

Serie incomplete di embrioni di *Pristiurus melanostomus* mi dimostrano che per quanto diverso sia il numero delle ampolle appartenenti ai varî sottogruppi e diverso pure sia l'ordine secondo il quale esse appariscono, pure non c'è divario essenziale con *Torpedo*, per quel che riguarda i primi momenti di loro formazione e i successivi differenziamenti fino a completo sviluppo.

Per quanto concerne *Mustelus laevis*, Allis [1] afferma di non aver trovata alcuna indicazione di ampolle in embrioni di 36 mm. Io posso assicurare, invece, che già in embrioni di 28 mm. si distinguono benissimo le ampolle sopraorbitali, le infraorbitali e le io-mandibolari, precisamente nello stadio di ampolla individualizzata.

E nello stesso stadio e in quello di ampolla cava trovo riccamente rappresentate le ampolle appartenenti ai medesimi tre gruppi, in un embrione di *Raja punctata* di 30 mm. di lunghezza.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: Taramelli, Ferraris, Borzì, Maffucci, Fischer, Klein, Pflueger, Rosenbusch, Virchow; presenta inoltre il vol. III degli *Atti della Società per gli studi della malaria.*

Il Vicepresidente Blaserna presenta, a nome del Socio Tacchini, varie pubblicazioni del comandante Cattolica, accompagnando la presentazione colle seguenti notizie:

« L'ingegnere comandante Cattolica membro della Commissione geodetica italiana, che insegnava astronomia nautica e idrografia nella Regia Accademia navale di Livorno, fu chiamato a dirigere l'Istituto Idrografico della R. Marina in Genova fino dal 1897.

« Egli ha dato un nuovo ordinamento all'Istituto su basi più scientifiche, per modo che l'Istituto medesimo potesse concorrere al progresso degli studî di sua competenza.

« Il Cattolica, dopo assunta la direzione, ha compiuto la nuova idro-

---

guardo alla innervazione delle ampolle; contiene bensì un inutile sfoggio bibliografico (a cominciare dal secolo XVII) il quale non è altro che la ripetizione di ciò che si può leggere in qualunque opera precedente che tratti un po' diffusamente degli organi di senso laterale, ma non tiene conto nè della mia Nota del '91, nè di lavori recenti di altri (stampati in lingua tedesca e in giornali tedeschi), portanti chiaramente nel titolo l'espressione: *Ampolle di Lorenzini.*

[1] L. c. pag. 94.

grafia dell'Adriatico, che consta di 3 carte generali e di oltre 20 piani, lavori in gran parte già pubblicati.

« Egli inoltre ha eseguito molte determinazioni astronomiche e geodetiche, delle quali presenta all'Accademia alcune delle più importanti, quali:

1°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897, secondo il metodo di Talcott.

2°) Determinazione della latitudine dell'Osservatorio del R. Ufficio Idrografico, mediante passaggi di stelle al primo verticale, eseguita nel 1898.

3°) Stazione astronomica a San Cataldo di Bari eseguita nel 1898.

4°) Operazioni eseguite nell'anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova.

« Offre inoltre all'Accademia un esemplare del suo trattato di navigazione, che serve di testo alla R. Accademia da dieci anni ed a varî Istituti nautici del Regno, ciò che dimostra con quanto amore e competenza egli coltivi le discipline nautiche.

« Infine, credo di dover segnalare all'Accademia una nuova importante pubblicazione da lui iniziata, cioè gli Annali idrografici dei quali presento i due primi fascicoli, nel secondo dei quali trovasi anche la descrizione della nuova stazione meteorologica dell'Istituto Idrografico ».

Il Socio generale Ferrero, a nome della R. Commissione geodetica italiana da lui presieduta, offre la pubblicazione: *Collegamento geodetico delle isole Maltesi con la Sicilia*, e ne discorre.

Il Socio Volterra presenta, a nome dell'autore, due volumi del *Corso di Meccanica razionale* del prof. F. Caldarera.

Il Socio Betocchi fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. Berchet, colle seguenti parole:

« A nome dell'Autore, chmo cav. Federico Berchet Direttore dell'Ufficio Regionale per la conservazione dei monumenti del Veneto, ho l'onore di presentare all'Accademia la Relazione di tutti i lavori eseguiti ai monumenti della Regione Veneta durante gli esercizi 1899-900 e 1900-901.

« In pari tempo ho l'onore di presentare alcune sue pregievolissime monografie che riguardano le sale d'armi del Consiglio dei X nel palazzo Ducale di Venezia; la sala del maggior consiglio nello stesso palazzo; ed una geniale proposta di restauro e ripristinamento nello stato originario e nelle squisite forme architettoniche che aveva nel secolo XVI la loggia Veneziana di Candia comunemente detta dell'Armeria, che si ritiene opera del Sammicheli al quale il Senato Veneto aveva affidata la costruzione delle fortificazioni di quell'isola; loggia che attualmente si trova manomessa, mu-

tilata e deturpata per la incuria e per le modificazioni in essa introdotte durante il dominio Musulmano.

« Queste pubblicazioni, e sopratutto poi le predette monografie non possono a meno di essere di grandissimo interesse per tutti coloro i quali si occupano d'arte, ed in special modo della storia dell' arte italiana ».

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società Reale di Londra; la Società zoologica di Tokyo; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geografica del Cairo; la Società geologica di Manchester; l' Ufficio geodetico internazionale di Potsdam; l' Istituto Teyler di Harlem; l' Istituto Smithsoniano di Washington.

Annunciano l' invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero della Guerra; le Società zoologiche di Ottawa e di Pietermaritzburg; l' Ufficio per la misura del grado, di Vienna.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 aprile 1902.

Alberti V. — Su la determinazione dei radianti. Napoli, 1901. 8°.

Id. — Sul clima di Napoli. Napoli, 1901. 4°.

Andoyer H. — Théorie de la Lune. Paris, 1902. 8°.

Atti della Società per gli Studî della malaria. Vol. III. Roma, 1902. 8°.

Barbarin P. — La Géométrie non euclidienne. Paris, 1902. 8°.

Bericht ueber die Feier von R. Virchow's achtzigstem Geburtstag am 13 Oktober 1901. Berlin, 1902. 8°.

Berlese A. — Sulle concrezioni cristalline contenute negli organi in dissoluzione e nelle sostanze albuminoidi in via di digestione nelle ninfe degli insetti metabolici. Jena, 1902. 8°.

Bombicci L. — Alcune obbiezioni circa i supposti cristalli liquidi ed i pretesi cristalli viventi. Bologna, 1901. 4°.

Id. — Di un sensibile aumento di volume negli aghetti di Rutilo (Sagenite) diffusi nei limpidi cristalli di Quarzo. Bologna, 1901. 4°.

Bombicci L. — Sui probabili modi di formazione dei cristalli di Granato. Bologna, 1902. 4°.

Bonomi A. — Il 5° Congresso zoologico internazionale di Berlino e l'escursione dei congressisti sul Mar del Nord. Rovereto, 1902. 8°.

Borzì A. — Contribuzioni alla Biologia vegetale. Vol. III, 1. Palermo, 1902. 8°.

Caldarera F. — Corso di meccanica razionale. Vol. I, II. Palermo, 1901. 8°.

Collegamento geodetico delle Isole Maltesi con la Sicilia. Firenze, 1902. 4°.

Curreri G. — Considerazioni intorno alla legge di Baer. Milano, 1902. 8°.

Id. — Osservazioni comparative sul Plancton Pelagico comparente nel porto di Messina. Messina, 1899. 8°.

Id. — Osservazioni sui Ctenofori comparenti nel porto di Messina. Roma, 1900. 8°.

Id. — Osservazioni sulla struttura dell'ectoderma dei Ctenofori. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulla formazione del Mar dei Sargassi. Milano, 1901. 8°

Id. — Sulla respirazione di alcuni insetti acquaiuoli. Roma, 1901. 8°.

Id. — Sulle cause meccanico-biologiche della formazione degli accumoli di Plancton. Roma, 1901. 8°.

D'Achiardi G. — Studio di alcune rocce sienitiche di Kadì-Kalé (prov. di Smirne). Pisa, 1902. 8°.

Ercolini G. — Due esperienze da lezione. Pisa, 1902. 8°.

Id. — Variazione della costante dielettrica del causciù con la trazione meccanica. Pisa, 1902. 8°.

Gegenbaur C. — Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen. II Bd. Leipzig, 1901. 8°.

Giglioli I. — Lo Stato italiano e la cultura del sughero specialmente nella Sardegna. Portici, 1902. 4°.

Gotta G. — Nuovi tipi di palloni dirigibili. Voltri, 1901. 4°.

Klein C. — Optische Studien II. Berlin, 1902. 8°.

Kölliker A. — Weitere Beobachtungen ueber die Hoffmann'schen Kerne am Mark der Vögel. Jena, 1902. 8°.

Le Moine E. Géométrographie ou art des constructions géométriques. Paris, 1902, 8°.

Leonardi Cattolica P. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio della R. Accademia Navale di Livorno, fatta nel 1897 secondo il metodo di Talcott. Genova, 1897. 4°.

Id. — Determinazione della latitudine dell'Osservatorio del R. Ufficio idrografico mediante passaggi di stelle al primo verticale eseguita nel 1898. Genova, 1898. 4°.

Id. — Operazioni eseguite nell'anno 1899 per determinare la differenza di longitudine fra Livorno e Genova. Genova, 1900. 4°.

Id. — Stazione astronomica a S. Cataldo di Bari. Genova, 1899. 4°.

Id. — Trattato di navigazione. Livorno, 1893. 8°.

Macé de Lépinay J. — Franges d'interférence. Paris, 1902. 8°.

Maffucci A. — Intorno alla diversità di decorso della tubercolosi congenita ed acquisita. Catania, 1902. 8°.

Id. — Ricerche sperimentali intorno alla tossina e bacilli tubercolari contenuti nella sperma di animali tubercolotici. Firenze, 1902. 8°.

Maggiora A. e *Valenti G. L.* — Su una epizoozia di tifo essudativo dei Gallinacei. Nota I. Modena, 1901. 4°.

Néculcéa E. — Le phénomène de Kerr. Paris, 1902. 8°.

Omboni G. — Appendice alla nota sui denti di *Lophiodon* del Bolca. Venezia, 1902. 8°.

Pflüger E. — Ueber die Verseifung, welche durch die Galle vermittelt wird und die Bestimmung von Seifen neben Fettsäuren in Gallenmischungen. Bonn, 1902. 8°.

Rajna M. — Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari. Milano, 1902. 8°.

Raoult F. M. — Cryoscopie. Paris, 1901. 8°.

Reports to the Malaria Committee. 6th Series. London, 1902. 8°.

Riefler S. — Das Nickelstahl-Compensationspendel D. R. P. No. 100870. München, 1902. 8°.

Rosenbusch H. — Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. II. Die Kalksilikatfelse im Rench- und Kinzigitgneiss. Heidelberg, 1901. 8°.

Schuchardt C. — Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Hannover, 1902. f°.

Studî e ricerche istituite nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Università di Pisa. F. 17. Pisa, 1902. 8°.

Taramelli T. — La Lotta dei Titani nella Geologia. Pavia, 1902. 8°.

Virchow R. — Zur Erinnerung. Blätter des Dankes für meine Freunde. Berlin, 1902. 8°.

V. C.